page 62 Concours des P.L.P.2.
1988 externe-

CONCOURS EXTERNE PLP2

Section : SCIENCES

Option : MATHÉMATIQUES - SCIENCES PHYSIQUES

MATHÉMATIQUES

SESSION DE 1988

Durée : 3 heures

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants entre eux. Ces problèmes peuvent être traités dans un ordre quelconque.

La clarté et la précision des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Tout résultat indiqué dans l'énoncé peut être utilisé par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, notamment des calculatrices de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

PREMIER PROBLÈME

Le problème décrit une méthode permettant le calcul numérique approché d'une intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ à une précision donnée. On illustre cette méthode en prenant la fonction φ définie par $\varphi(x) = e^{-x^2}$, la précision demandée étant 10^{-4}.

1. *Préliminaire*

On rappelle le théorème de Rolle : « Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$, alors existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. » Dans ce qui suit, f est une fonction réelle continûment jusqu'à l'ordre 4 sur $[a, b]$. On désigne par M la borne supérieure de $|f^{(4)}(x)|$ sur $[a, b]$.

dérivable

1.1. Soit K le réel unique défini par :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}[f(b)+f(a)] - \frac{(b-a)^2}{12}[f'(b)-f'(a)] + \frac{(b-a)^5}{720}K.$$

On définit la fonction g sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \frac{x-a}{2}[f(x)+f(a)] + \frac{(x-a)^2}{12}[f'(x)-f'(a)] - \frac{(x-a)^5}{720}K.$$

En appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle à la fonction g et à ses dérivées, montrer qu'il existe α élément de $]a, b[$ tel que $K = f^{(4)}(\alpha)$.

1.2. On partage $[a, b]$ en n segments égaux au moyen des points $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ $(i = 0, 1, ..., n)$. Déterminer, à l'aide de n, de $h = b - a$ et de M, un majorant de l'erreur commise en approchant l'intégrale $I = \int_a^b f(t)\,dt$ par la quantité I' où :

$$I' = \frac{h}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{i=n-1} f(x_i)\right] - \frac{h^2}{12n^2}[f'(b)-f'(a)].$$

2. *Existence de* $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ *et majoration de* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$

2.1. Étudier les variations de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = e^{-x^2}$ et construire sa courbe représentative.

Tournez la page S. V. P.

2.2. Soit a un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel X supérieur à a,

$$\int_a^X e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-a^2}}{2a} - \frac{e^{-X^2}}{2X} - \frac{1}{2}\int_a^X \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt.$$

En déduire :

a. L'existence de $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

b. L'inégalité : $\int_a^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{e^{-a^2}}{2a}$.

2.3. Déduire de ce qui précède : $\left| \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx - \int_0^3 \varphi(x)\,dx \right| < 3 \cdot 10^{-8}$.

Le calcul de J à 10^{-4} près se ramène donc au calcul de $\int_0^3 \varphi(x)\,dx$ à $7 \cdot 10^{-8}$ près.

3. *Calcul approché de* $\int_0^3 \varphi(x)\,dx$

3.1. Calcul approché de $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$.

a. u étant un élément de $[0, 1]$ et n étant un entier positif quelconque, montrer que :

$$\left| e^{-u} - \left(1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right| \leqslant \frac{u^n}{n!}.$$

On pourra commencer par le cas $n = 1$ en intégrant, sur $[0, u]$, l'inégalité $0 < e^{-t} \leqslant 1$.

b. On pose :

$$A_n = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\,5} - \frac{1}{3!\,7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(2n-1)}\right).$$

Déduire de l'inégalité précédente un majorant de $|A_n|$.

c. Déterminer une valeur N de l'entier n à partir de laquelle $|A_n| < 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ et calculer une valeur approchée de $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ à $2 \cdot 10^{-8}$ près.

3.2. Calcul approché de $\int_1^3 \varphi(x)\,dx$.

a. Calculer $\varphi^{(4)}(x)$ et $\varphi^{(6)}(x)$ et évaluer $M = \sup_{x \in [1,3]} |\varphi^{(4)}(x)|$. Pour simplifier les calculs, on remarquera que $\varphi^{(4)}(x)$ s'exprime à l'aide de x^2.

b. En ayant choisi au préalable une valeur de l'entier n telle que $\frac{M \cdot 2^8}{720\,n^4} < 4 \cdot 10^{-8}$, déterminer une valeur approchée de $I = \int_1^3 \varphi(x)\,dx$ à la précision de $5 \cdot 10^{-8}$. (On se servira de la majoration de $|I - I'|$ obtenue à la fin du préliminaire.)

3.3. Déterminer une valeur approchée de $J = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ à la précision demandée 10^{-4}.

Tournez la page S. V. P.

DEUXIÈME PROBLÈME

(P) désigne le plan euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. À tout point m de (P) de coordonnées (x, y), on associe son affixe $z = x + iy$. f étant l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2$, on étudie l'application F de (P) dans lui-même qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $f(z)$. Plus particulièrement, on étudie l'action de F sur les droites parallèles aux axes de coordonnées et on montre que les courbes, images respectives de ces axes, sont orthogonales. On étudie également l'image par F d'un rectangle de (P) à côtés parallèles aux axes.

Pour les représentations des courbes et des régions du plan (P) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on utilisera l'unité graphique de 2 cm.

1. *Injectivité et surjectivité de F*

1.1. m étant un point donné de (P), déterminer les points m' tels que $F(m) = F(m')$. L'application F est-elle injective?

1.2. F est-elle surjective?

2. *Action de F sur les droites de direction $\vec{u}$ ou $\vec{v}$*

2.1. Déterminer les images par F de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

2.2. Soit a un réel donné non nul, déterminer l'image P_a par l'application F, de la droite d'équation $x = a$. Quelle est la nature géométrique de P_a ? Tracer, en particulier, les deux courbes P_1 et $P_{\sqrt{2}}$.

2.3. Soit b un réel donné non nul, déterminer l'image Q_b, par F, de la droite d'équation $y = b$. Tracer, en particulier, les courbes $Q_{1/2}$ et Q_1.

2.4. Soient a et b deux réels quelconques non nuls.

a. Déterminer les points d'intersection de P_a et de Q_b.

b. Quels sont les antécédents par F de ces points?

c. Montrer qu'en l'un quelconque des points d'intersection de P_a et de Q_b, les tangentes respectives à ces deux courbes sont perpendiculaires.

3. *Image d'un rectangle à côtés parallèles aux axes*

Dans ce qui suit, on suppose donnés quatre réels a, a', b, b' vérifiant :

$$0 < a < a'$$
$$0 < b < b'.$$

3.1. Déterminer et définir géométriquement la région R_a, image par F du demi-plan ensemble des points m d'abscisses $x > a$.

3.2. Déterminer et définir géométriquement la région $S_{a'}$, image par F de l'ensemble des points m d'abscisses x vérifiant : $0 < x < a'$.

3.3. Déterminer et définir géométriquement les régions T_b et $U_{b'}$, images par F des ensembles de points m d'ordonnées y vérifiant respectivement $y > b$ et $0 < y < b'$.

3.4. Déterminer enfin la région, image par F du rectangle, ensemble des points m de coordonnées (x, y) vérifiant $a < x < a'$ et $b < y < b'$. Dessiner le plus soigneusement possible cette région lorsque $a = 1$, $a' = \sqrt{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $b' = 1$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail